ICARE A – SESSION 1999

MATHEMATIQUES 2

FILIERES MP/PC/PSI/PT

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. R^n est rapporté à sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soit I la matrice carrée identité d'ordre n, I=diag(1,1,...,1). Soit O la matrice carrée d'ordre n nulle. Soit U la matrice carrée d'ordre n constituée uniquement de « 1 »,

$$U = (a_{ij}) \text{ avec } a_{ij}=1 \quad 1\leq i\leq n \; ; 1\leq j\leq n.$$

Soit $\mathcal{M}_n(R)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

PARTIE I

Soit E le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(R)$ engendré par I et U .

1°) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension deux sur R.

2°) Pour p entier naturel non nul donné, calculer U^p .

3°) Montrer que E est stable pour la multiplication.

4°) Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E.

a- Calculer A^p en fonction de α, β, p, I et U, p désignant un entier naturel non nul.

b- A quelle(s) condition(s) portant sur α et β A est-elle inversible ? Calculer alors l'inverse A^{-1} en fonction de α, β, I et U .

c- Préciser, A étant inversible, A^p pour p entier relatif (la formule obtenue devant être valable pour « p » entier naturel non nul, pour « p=0 » et pour « p » entier relatif strictement négatif).

5°) a- Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E où β est non nul. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P du second degré $P(x) = x^2 + \lambda x + \mu$ tel que P(A) = O .

b-Soit Q un polynôme à coefficients réels. Montrer que Q(A) = O si et seulement si P divise Q.

PARTIE II

Soit u l'endomorphisme de R^n dont la matrice dans la base canonique de R^n est U.

Soit i l'identité de R^n. Soit $p_0 = \frac{1}{n}u$ et $p_1 = i - p_0$; Soit $E_0 = \ker p_0$; $E_1 = \ker p_1$.

1°) a- Montrer que p_0 et p_1 sont des projecteurs ;

b- Déterminer Ker p_0, Im p_0, Ker p_1, Im p_1 en donnant une base de chacun de ces quatre sous espaces.

c- Quels sont les sous espaces propres de p_0 et p_1 ?

d- En déduire les sous espaces propres et les valeurs propres de u..

2°) Soit A_0 la matrice de p_0 dans la base canonique de R^n, A_1 la matrice de p_1 dans cette même base. Montrer que (A_0 , A_1) est une base de $E = \text{Vect}\{I,U\}$.

3°) Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E, β étant non nul.

a- Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de l'endomorphisme f dont A est la matrice dans la base canonique de R^n.

b- Donner les composantes de A dans la base (A_0 , A_1).

PARTIE III

Soit $A = \alpha I + \beta U$ un élément de E fixé ; On veut étudier les solutions réelles du système différentiel $\mathbf{X' = A\,X}$ où X est une application de R dans R^n que nous pourrons écrire :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$ Chaque $x_i(t)$ étant une application de R dans R de classe C^1.

1°) Soit X une application de R dans R^n. Pour tout réel t, X(t) est un vecteur de R^n

a- Montrer qu'il peut s'écrire, et ceci d'une seule façon,

$$X(t) = Y(t) + Z(t)$$

Où Y(t) est élément de $E_0 = \ker(p_0)$ et Z(t) un élément de $E_1 = \ker(p_1)$.

b-Montrer que X est de classe C^1 sur R si et seulement si Y et Z le sont.

c-Montrer que X est solution du système différentiel **X' = A X** si et seulement si les applications Y et Z sont solutions de systèmes différentiels que l'on précisera.

2°) Soit a un élément de R^n ; On note X_a une solution de **X' = A X** telle que X(0) = a.

a- Montrer (sans calcul) l'existence et l'unicité d'une telle solution.

b- Puisque $R^n = E_0 \oplus E_1$; On peut écrire a sous la forme a = b + c où b et c appartiennent respectivement à E_0 et à E_1 . Calculer l'unique solution Y_b du système en Y telle que Y(0)=b. Calculer l'unique solution Z_c du système en Z telle que Z(0)=c. En déduire X_a.

PARTIE IV

Résoudre **X' = A X** avec $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ sachant $X(0) = a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.(Pour résoudre cette question nous conseillons d'appliquer les résultats obtenus dans la troisième partie).